Filtr stabilizacyjny Kalmana

jako podstawa działania autopilota

Mateusz Niewiadomski

Phoenix Systems

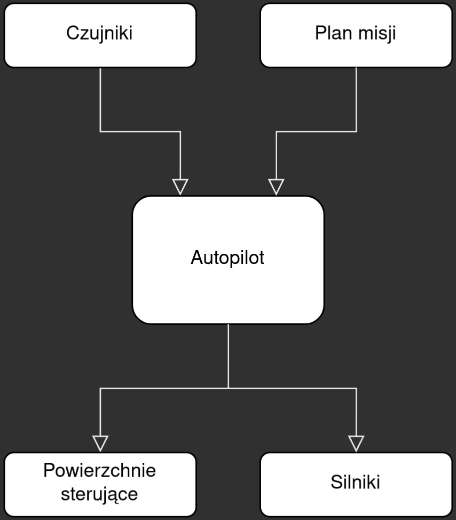
30.05.2022

Summary

Definicja

Automatyczny pilot (autopilot) – urządzenie służące do wykonywania określonego zestawu zadań umożliwiających automatyczne sterowanie obiektem (samochodem/samotem/śmigłowcem/dronem).

Zasada działania

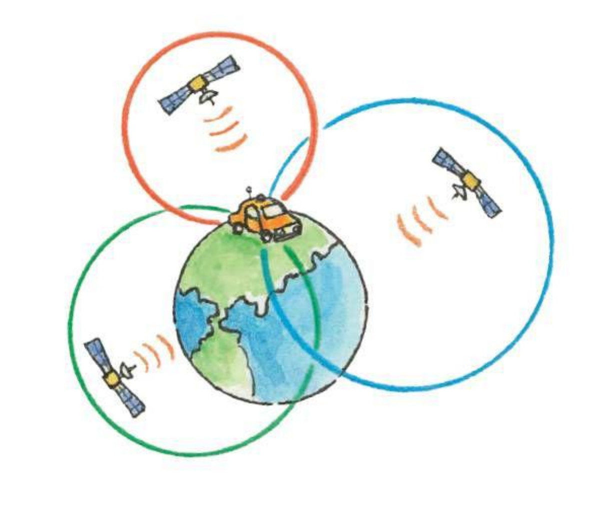


Zasada działania

- Pomiar położenia w przestrzeni
- Wyznaczenie uchybu
- Wyznaczenie reakcji

Pomiar położenia

Pomiar położenia i prędkości



Source: https://www.scribd.com/article/474509003/Where-Am-I-How-Gps-Works

Pomiar obrotu

IMU

Inercyjna jednostka pomiarowa - urządzenie zdolne do pomiaru inercyjnych efektów ruchów liniowych i/lub obrotowych pozwalające wyznaczyć parametry tych ruchów takie jak:

- prędkość kątowa
- przyspieszenia liniowe

Podstawowe urządzenia pomiarowe IMU:

- Żyroskop
- Akcelerometr

Urządzenia dostępne na rynku często wzbogacane są o:

- Magnetometr
- Barometr

Filtr Kalmana

Definicja

Filtr Kalmana

Algorytm rekurencyjnego wyznaczania minimalno-wariancyjnej estymaty wektora stanu modelu liniowego dyskretnego układu dynamicznego na podstawie pomiarów wyjścia oraz wejścia tego układu. Przyjmuje się założenie, że zarówno pomiar, jak i proces przetwarzania wewnątrz układu jest obarczony błędem o rozkładzie gaussowskim.

W skrócie filtr Kalmana:

- znając działanie układu przewiduje (estymuje) jego stan w danej chwili czasu
- aktualizuje stanu układu przy dostarczeniu nowych pomiarów

Przykład pomiaru temperatury

Założenia początkowe

- Przyjęto temperaturę początkową 100 +-2 °C
- Termometr ma dokładność 2 °C
- realna temperatura początkowa to 95 C
- temperatura maleje 0.1 °C na sekundę

Stan układu:

$$x_{0|0} = 100$$

Kowariancja stanu układu:

$$p = 2 \cdot 2 = 4$$

Pętla filtru kalmana

Krok predykcji (Prediction step)

$$x_{1|0} = x_{0|0} - 0.1 = 99.9$$

$$p_{1|0} = p_{0|0} \cdot 1 = 4$$

Krok pomiaru (Update step)

$$z_1 = 91.18$$

$$r = 2 \cdot 2 = 4$$

Czemu zaufać bardziej: estymacie, czy pomiarowi?

Odpowiedź: zależy co jest jak dokładne

Zysk Kalmana (Kalman gain)

Zysk kalmana

(1)

$$K = \frac{\Delta_{estimate}}{\Delta_{estimate} + \Delta_{measurement}}$$

(2)

$$x_{1|1} = x_{1|0} + K \cdot (z_1 - x_{1|0})$$

(3)

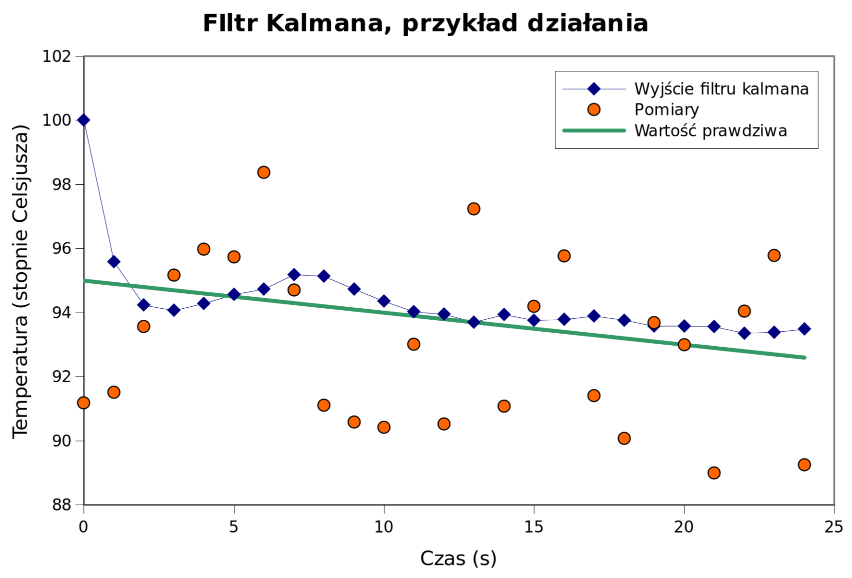
$$p_{1|1} = (1 - K)p_{1|0}$$

$$K_1 = \frac{4}{4+4} = 0.5$$

$$x_{1|1} = 99.9 + 0.5 \cdot (91.18 - 99.9) = 95.54$$

$$p_{1|1} = (1 - 0.5) \cdot 4 = 2$$

Działanie filtru Kalmana



Przypadek wielowymiarowy, uproszczony H = I

$$x_{k|k-1} = Fx_{k-1|k-1} + B_k u_k$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q$$

$$y_k = z_k - x_{k|k-1}$$

$$K_k = P_{k_{|}k-1}(P_{k|k-1} + R)^{-1}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k y_k$$

$$P_{k|k} = (I - K_k)P_{k|k-1}$$

Przypadek wielowymiarowy, postać ogólna

$$y_k = z_k - H_k x_{k|k-1}$$

$$x_{k|k-1} = F x_{k-1|k-1} + B_k u_k$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R)^{-1}$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k y_k$$

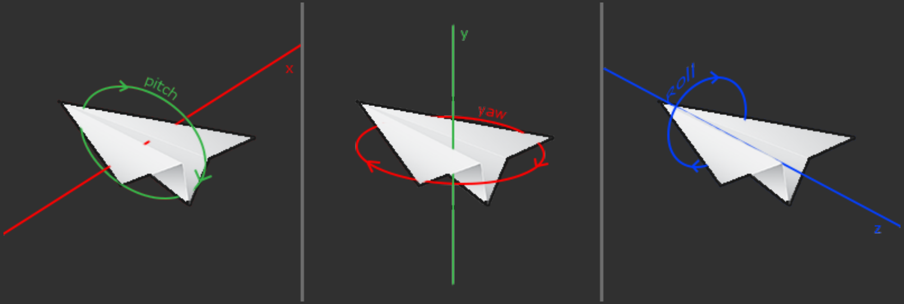
$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

Przykłady macierzy x, P, F oraz H dla jednowymiarowej nawigacji zliczeniowej:

$$\mathsf{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} cov_x & 0 & 0 \\ 0 & cov_v & 0 \\ 0 & 0 & cov_a \end{bmatrix} \quad \mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & dt & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathsf{H}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

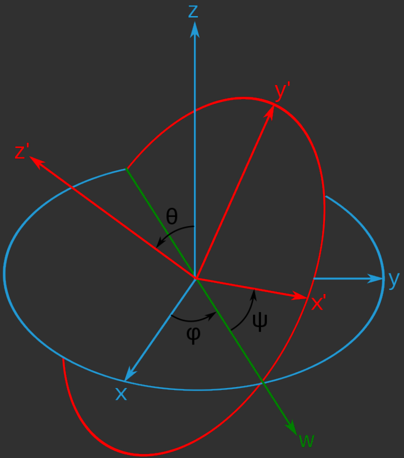
Kwaterniony jako sposób obliczania obrotów

Klasyczne podejście: kąty eulera



https://learnopengl.com/img/getting-started/camera$_{p}itch_{y}aw_{r}oll.png$

Klasyczne podejście: kąty eulera



source: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a1/Eulerangles.svg/1200px-Eulerangles.svg.png

Klasyczne podejście: kąty eulera

Reprezentacja położenia w przestrzeni:

$$x = [\psi, \theta, \phi]$$

Macierze obrotów:

$$\begin{bmatrix} cos\phi cos\psi - sin\phi sin\psi cos\theta & sin\phi cos\psi + cos\phi sin\psi cos & sin\psi cos\theta \\ -cos\phi sin\psi - sin\phi cos\psi cos & -sin\phi sin\psi + cos\phi cos\psi cos\theta & cos\psi sin\theta \\ sin\phi sin\theta & -cos\phi sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

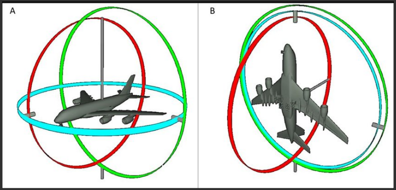
Klasyczne podejście: kąty eulera

Zalety

- Intuicyjne

Wady

- Kosztowne obliczeniowo
- Nieciągłości i gimball lock



source: https://www.researchgate.net/figure/Gimbal-lock-problem-for-Euler-angles-A-no-gimbal-lock-B-yaw-and-roll-angles-are_fig14_331745225

Kwaterniony

Kwaternion

Liczba zespolona składająca się z jednej części rzeczywistej i trzech części zespolonych.
Postać algebraiczna:

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

Mnożenie kwaternionów

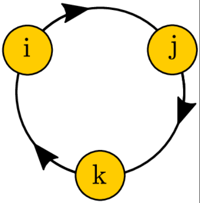
Zasady mnożenia kwaternionów

Brak przemienności mnożenia: mnożenie odbywa się według zasad:

$$i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$kj = -i, ji = -k, ik = -j$$



source: Herfray, Yannick. (2018). New Avenues for Einstein's Gravity: from Penrose's Twistors to Hitchin's Three-Forms.

Własności kwaternionów

Postać kwaternionu

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

- Sprzężenie:
$$q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$$
- Nieprzemiennośc mnożenia:
$$ab \neq ba$$

Obroty z użyciem kwaternionów

Aby obrócić wektor $a = [a_x, a_y, a_z]$ o kąt ψ wokół osi obrotu $w = [w_1, w_2, w_3]$ $(||w|| = 1)$ należy skonstruować kwaternion postaci:

$$q = cos\frac{\psi}{2} + sin\frac{\psi}{2}(iw_x + jw_y + kw_z)$$

oraz

$$a_q = ia_x + ja_y + ka_z$$

i wykonać mnożenie:

$$q \cdot a_q \cdot q^* = b_q$$

Otrzymany kwaternion b_q można rozkodować do wektora b który jest obróconym wektorem a w następujący sposób:

$$b = [b_{qi}, b_{qj}, b_{qk}]$$

Zalety i wady

Zalety

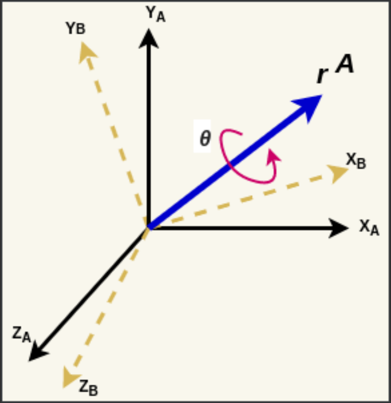
- Kwaternion przechowuje informacje o obrocie obiektu
- Brak potrzeby obliczania funkcji trygonometrycznych
- Mnożenie kwaternionów = składanie obrotów
- Prostota wzorów aktualizacji o pomiary z żyroskopu:

$$q_{t+dt} = q_t + \frac{dt}{2}\omega_t q_t$$

Wady

- Nieintuicyjne
- Problem znajdowania kwaternionu obrotu pomiędzy dwoma układami współrzędnych

Wizualizacja obrotu wokół osi



source: https://adipandas.github.io/images/quaternion_rotation_1.png

Wyznaczanie położenia przy użyciu filtru Kalmana

- Wektor stanu:
$$x^T = [\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{w}, \mathbf{q}, \mathbf{a}`, \mathbf{w}`, \mathbf{m}`]$$
- Wektor pomiarowy:
$$z^T = [\mathbf{a}`, \mathbf{w}`, \mathbf{m}`]$$
- Wykorzystujemy kwaternion obrotu do obrócenia wartości zmierzonych przed uwzględnieniem ich w wektorze stanu

$$x_{k|k-1} = F x_{k-1|k-1} + B_k u_k$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q$$

$$y_k = z_k - H_k x_{k|k-1}$$

$$K_k = P_{k_|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R)^{-1}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k y_k$$

$$P_k|k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

Rozszerzony filtr Kalmana (EKF)

Uwaga!

Kwaterniony pociągają za sobą nieliniowe obliczenia. Zwykły filtr Kalmana jest filtrem liniowym. Należy zastosować jego rozszerzoną wersję.

Zmiany:

- zamiast macierzowego równania predykcji pojawia się funkcja:

$$x_{k|k-1} = f(x_{k-1|k-1})$$

- zamiast macierzowego równania innowacji jest funkcja:

$$y_k = z_k - h(x_{k-1|k})$$

- macierze F i H są wyznaczane jako jakobian funkcji f i h

EKF

$$F = \frac{\delta f}{\delta x, u}$$

$$x_{k|k-1} = f(x_{k-1|k-1}, u_k)$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q$$

$$H = \frac{\delta h}{\delta x};$$

$$y_k = z_k - h(x_{k|k-1})$$

$$K_k = P_{k_|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R)^{-1}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k y_k$$

$$P_k|k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

The End